

EJERCICIO

Objetivo: Desarrollar las ecuaciones aeroelásticas con cargas externas. Analizar la influencia de una carga externa en el sistema aeroelástico. Distinguir entre un problema de respuesta y un problema de inestabilidad aeroelástica. Introducción a las ecuaciones en el dominio del tiempo (estado-espacio).

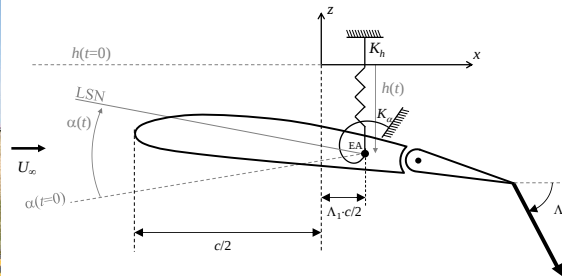
Introducción: La figura inferior izquierda corresponde al ala de un avión cisterna de reabastecimiento en vuelo mediante el sistema cesta-pértiga. La manguera ejerce una tensión estacionaria T_0 que depende de la velocidad de vuelo, la longitud de manguera extraída pero, en situaciones excepcionales, se desarrollan oscilaciones en la manguera que hacen que la tensión fluctúe con valores incrementales T . El diseño del avión cisterna debe tener en cuenta estas cargas no estacionarias.

Enunciado: La figura inferior derecha representa la sección típica 3/4 de un ala con rigidez a flexión K_h y rigidez a torsión K_α . Existe una carga en el borde de salida que refleja las cargas introducidas por la manguera (tensión incremental T) de forma aproximada. Se asume que la manguera oscila de forma que la tensión T se puede considerar una función armónica de frecuencia (rad/s) ω_0 . Considerar amortiguamiento estructural nulo.

Se pide:

1. Formular la fuerza y momento aerodinámico (Q_h y Q_α respectivamente) utilizando la teoría aerodinámica *estacionaria* que asume cargas proporcionales al ángulo efectivo $\alpha + \dot{h}/U_\infty$.
2. Formular las ecuaciones aeroelásticas en el dominio del tiempo y establecer la solución en la frecuencia para la excitación armónica T de frecuencia ω_0 .
3. Describir de forma cualitativa la dependencia de la velocidad de *flutter* con la excitación externa T y con la frecuencia ω_0 .
4. Calcular la velocidad de *flutter* adimensionalizada $2U_F/\omega_\alpha c$ para los siguientes valores de los parámetros (se utiliza la misma notación que en las clases teóricas): $\Lambda_1 = -0,1$, $x_\alpha = 0,20$, $r_\alpha = 0,50$, $\mu = 10.$, $\omega_h/\omega_\alpha = 0,50$ y los siguientes valores de la fuerza de excitación adimensionalizada $2T/mc = 1.$ y $\omega_0 = 1\text{rad/s}$.
5. Formular las ecuaciones en el dominio del tiempo del apartado (2) en el formato Estado-Espacio $d\{x\}/dt = [A]\{x\} + [B]\{u\}$.

Homework: Se realiza el siguiente cambio de variable: $x_1 = h$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \dot{h}$ y $x_4 = \dot{\alpha}$. Compruebase que el sistema aeroelástico en el dominio del tiempo se puede escribir como una EDO de primer orden: $d\vec{x} = [A]\vec{x} + [B](2T/mc)$, donde $\vec{x} = [x_1 x_2 x_3 x_4]^T$ y $2T/mc$ es la carga exterior adimensionalizada.



SOLUCIÓN

APARTADO 1

Las ecuaciones de flexión y torsión se escriben como (asumiendo amortiguamiento estructural nulo):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + K_h h &= Q_h + T \cdot \sin \Lambda \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + K_\alpha \alpha &= Q_\alpha + T \cdot \frac{c}{2} \cdot (1 - \Lambda_1) \cdot \sin \Lambda \end{aligned} \right\}$$

Las fuerzas aerodinámicas, asumiendo teoría estacionaria, tienen la siguiente expresión en función del movimiento del perfil:

$$\begin{aligned} Q_h &= -2\pi\rho_\infty U_\infty^2 \frac{c}{2} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) \\ Q_\alpha &= 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 \left(\frac{c}{2} \right)^2 \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) \end{aligned}$$

NOTA: El concepto estricto de aerodinámica estacionaria es el de fuerza proporcional al ángulo α . Sin embargo, en algunos libros se introduce el concepto de ángulo efectivo $\alpha + \dot{h}/U_\infty$ (ver por ejemplo «Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity», Hodges, 2nd Edition, page 202). Éste «ángulo efectivo» es el que se ha preferido considerar en este problema ya que la formulación desarrollada con este ángulo contiene a una formulación en la que sólo se considere el ángulo α .

Adimensionalizando la ecuación de fuerzas por $mc/2$ y la de momentos por $m(c/2)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{h}}{c/2} + x_\alpha \ddot{\alpha} + \omega_h^2 \frac{h}{c/2} &= -\frac{2\pi\rho_\infty U_\infty^2 c/2}{mc/2} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{c/2} \right) + \frac{T}{mc/2} \sin \Lambda = \\ &= -2 \frac{1}{\frac{m}{\pi\rho_\infty (c/2)^2}} \frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{c/2} \right) + \frac{T}{mc/2} \sin \Lambda = \\ &= -\frac{2}{\mu} \frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{c/2} \right) + \frac{T}{mc/2} \sin \Lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_\alpha \frac{\ddot{h}}{c/2} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha &= \frac{2\pi\rho_\infty U_\infty^2 (c/2)^2}{m(c/2)^2} \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) + \frac{T}{mc/2} (1 - \Lambda_1) \sin \Lambda = \\ &= \frac{2}{\frac{m}{\pi\rho_\infty (c/2)^2}} \frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) + \frac{T}{mc/2} (1 - \Lambda_1) \sin \Lambda = \\ &= \frac{2}{\mu} \frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U_\infty} \right) + \frac{T}{mc/2} (1 - \Lambda_1) \sin \Lambda \end{aligned}$$

APARTADO 2

Asumiendo frecuencia de excitación ω_0 proveniente de la fuerza T :

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 \frac{\bar{h}}{c/2} - x_\alpha \omega_0^2 \bar{\alpha} + \omega_h^2 \frac{\bar{h}}{c/2} + \frac{2}{\mu} \frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \left(\bar{\alpha} + i \frac{\omega_0 c}{2U_\infty} \frac{\bar{h}}{c/2} \right) &= \frac{\bar{T}}{mc/2} \sin \Lambda \\ -x_\alpha \omega_0^2 \frac{\bar{h}}{c/2} - r_\alpha^2 \omega_0^2 \bar{\alpha} + r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \bar{\alpha} - \frac{2}{\mu} \frac{U_\infty^2}{(c/2)^2} \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) \left(\bar{\alpha} + i \frac{\omega_0 c}{2U_\infty} \frac{\bar{h}}{c/2} \right) &= \frac{\bar{T}}{mbc/2} (1 - a) \sin \Lambda \end{aligned}$$

En formato matricial:

$$\left(- \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_0} \right)^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix} - \frac{2}{\mu k_0^2} \begin{bmatrix} -ik_0 & -1 \\ ik_0 \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) & \Lambda_1 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{2\bar{h}}{c} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin \Lambda \\ (1 - \Lambda_1) \sin \Lambda \end{Bmatrix} \frac{2\bar{T}}{mc}$$

APARTADO 3

La velocidad de flutter se calcula resolviendo el determinante siguiente:

$$\left| - \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix} - \frac{2}{\mu k^2} \begin{bmatrix} -ik & -1 \\ ik \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) & \Lambda_1 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

donde ω es la frecuencia de flutter y $k = \omega c / 2U_\infty$ es la frecuencia reducida. Puede verse que el flutter no depende de la excitación externa T o de la frecuencia de excitación de la misma ω_0 .

APARTADO 4

Condición de flutter:

$$\left| - \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix} - \frac{2}{\mu k^2} \begin{bmatrix} -ik & -1 \\ ik \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) & \Lambda_1 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} -1 + \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 + \frac{2}{\mu k^2} ik & -x_\alpha + \frac{2}{\mu k^2} \\ -x_\alpha - \frac{2}{\mu k^2} ik \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) & -r_\alpha^2 + r_\alpha^2 \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{2}{\mu k^2} \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right| = 0$$

Sustituyendo los valores del problema:

$$\left| \begin{array}{cc} -1 + 0,5^2 \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 + \frac{2}{10 \cdot k^2} ik & -0,20 + \frac{2}{10 \cdot k^2} \\ -0,20 - \frac{2}{10 \cdot k^2} ik \left(-0,1 + \frac{1}{2} \right) & -0,50^2 + 0,50^2 \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{2}{10 \cdot k^2} \left(-0,10 + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[-1 + 0,5^2 \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 + \frac{2}{10 \cdot k^2} ik \right] \left[-0,50^2 + 0,50^2 \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{2}{10 \cdot k^2} \left(-0,10 + \frac{1}{2} \right) \right] - \\ & - \left[-0,20 - \frac{2}{10 \cdot k^2} ik \left(-0,1 + \frac{1}{2} \right) \right] \left[-0,20 + \frac{2}{10 \cdot k^2} \right] = 0 \\ & \left\{ \begin{array}{l} \left[-1 + 0,5^2 \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 \right] \left[-0,50^2 + 0,50^2 \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{2}{10 \cdot k^2} \left(-0,10 + \frac{1}{2} \right) \right] + 0,20 \cdot \left(-0,20 + \frac{2}{10 \cdot k^2} \right) = 0 \\ -0,50^2 + 0,50^2 \cdot \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{5k^2} \left(-0,10 + \frac{1}{2} \right) + \left(-0,1 + \frac{1}{2} \right) \left(-0,20 + \frac{1}{5k^2} \right) = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 = + \frac{1}{5} \left(\frac{8}{5} \right) + \frac{25}{25} = \frac{33}{25} \Rightarrow \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 = \frac{33}{25} \Rightarrow \frac{\omega_\alpha}{\omega} = \frac{\sqrt{33}}{5} \approx 1,1489$$

De la primera ecuación:

$$\begin{aligned} & \left[-1 + 0,5^2 \cdot 1,32 \right] \left[-0,50^2 + 0,50^2 \cdot 1,32 - \frac{2}{10 \cdot k^2} \left(-0,10 + \frac{1}{2} \right) \right] + 0,20 \cdot \left(-0,20 + \frac{2}{10 \cdot k^2} \right) = 0 \\ & -1,33 \cdot \left[0,08 - \frac{0,4}{5k^2} \right] - 0,04 + \frac{0,2}{5k^2} = 0 \\ & -0,1464 + 0,1464/k^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, de la última ecuación se obtiene que $k = 1$, de forma que la velocidad de flutter adimensionalizada con ω_α se escribe:

$$\frac{2U_F}{\omega_\alpha c} = \frac{2U_F}{\omega c} \frac{\omega}{\omega_\alpha} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{\omega_\alpha}{\omega}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1,1489} = 0,8704$$

APARTADO 5

Las ecuaciones de estado-espacio se desarrollan formulando las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del apartado 1 en un formato matricial. Para ello, se genera la siguiente variable-vector $\vec{x}$ que, comúnmente, se denomina «vector de estado»:

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}$$

Se comprueba que la derivada de este vector $d\vec{x}/dt$ se puede escribir como la suma de un término proporcional a $\vec{x}$ más un término proporcional a la fuerza T .